

### Dạng 3: Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

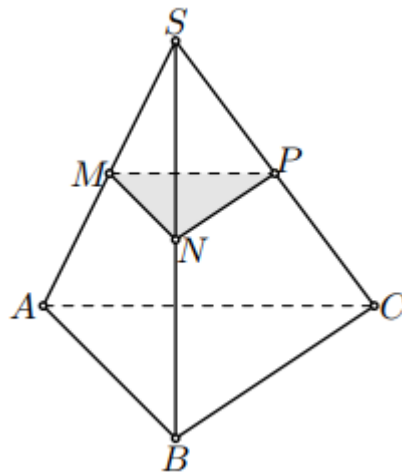
**Phương pháp:** Để xác định được thiết diện của một hình chóp hoặc hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  ta thường dựng các đoạn giao tuyến của  $(P)$  với các mặt của hình chóp hoặc hình lăng trụ đó. Khi ấy, ta sử dụng định lí sau:

- Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì giao tuyến của nó với mặt phẳng kia song song với giao tuyến của hai mặt phẳng.

#### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài tập 1:** Cho hình chóp  $S \cdot ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $SA$ . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(ABC)$ .

**Lời giải**



Ta có  $M$  là một điểm chung của  $(P)$  và  $(SAB)$

Do  $\begin{cases} (P) \parallel (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \end{cases}$  nên giao tuyến của  $(P)$  và  $(SAB)$  là đường thẳng đi qua  $M$  song song với  $AB$  và cắt  $SB$  tại trung điểm  $N$  của  $SB$ .

Tương tự, giao tuyến của  $(P)$  và  $(SAC)$  là đường thẳng đi qua  $M$ , song song với  $AC$  và cắt  $SC$  tại trung điểm  $P$  của  $SC$ .

Vậy thiết diện của hình chóp  $S.ABC$  cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  là tam giác  $MNP$ .

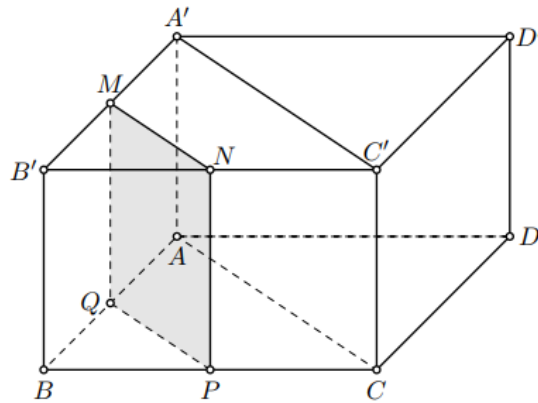
**Bài tập 2:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $A'B'$ . Tìm thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(A'C'C)$ . Thiết diện là hình gì?

**Lời giải**

Vì  $(P)$  song song với  $(A'C'C)$  nên  $(P)$  song song với  $(A'C'CA)$ .

Suy ra giao tuyến của  $(P)$  với  $(A'B'C'D')$  là đường thẳng đi qua  $M$ , song song với  $A'C'$  và cắt  $B'C'$  tại trung điểm  $N$  của  $B'C'$ .

Tương tự, giao tuyến của  $(P)$  với  $(B'C'CB)$  là đường thẳng đi qua  $N$ , song song với  $C'C$  và cắt  $BC$  tại trung điểm  $P$  của  $BC$ .



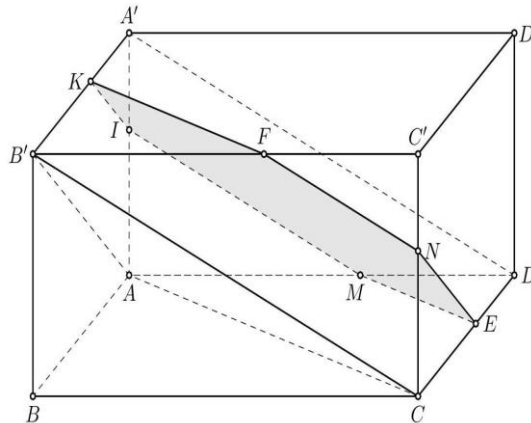
Giao tuyến của  $(P)$  với  $(A'B'BA)$  là đường thẳng đi qua  $M$ , song song với  $A'A$  và cắt  $AB$  tại trung điểm  $Q$  của  $AB$ .

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác  $MNPQ$ .

Do  $NP$  song song và bằng  $CC'$ ;  $MQ$  song song và bằng  $AA'$  nên tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành.

**Bài tập 3:** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ . Hai điểm  $M, N$  lần lượt nằm trên hai cạnh  $AD, CC'$  sao cho  $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'}$ . Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng qua  $MN$  và song song với  $(ACB')$

**Lời giải**



Gọi  $I$  là điểm trên  $AA'$  sao cho  $\frac{AI}{IA'} = \frac{AM}{MD}$  suy ra  $IM \parallel A'D$  suy ra  $IM \parallel CB'$

Lại có  $\frac{AI}{IA'} = \frac{CN}{NC'}$  suy ra  $IN \parallel AC$  suy ra  $(MNI) \parallel (ACB')$ .

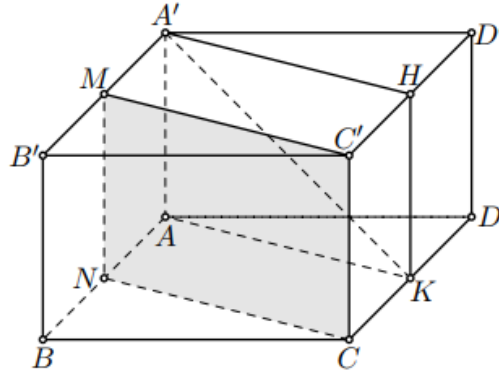
Do đó mặt phẳng  $(MNI)$  là mặt phẳng đi qua  $M, N$  và song song với mặt phẳng  $(ACB')$ .

Qua  $M$  kẻ  $ME \parallel AC$ ; qua  $N$  kẻ  $NF \parallel B'C'$ , qua  $F$  kẻ  $FK \parallel A'C'$ .

Khi đó thiết diện cần tìm là đa giác  $MENFKI$ .

**Bài tập 4:** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ . Gọi  $K$  là trung điểm  $CD$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $C'$  và song song với  $(A'AK)$ . Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng  $(P)$ .

**Lời giải**



Gọi  $H$  là trung điểm  $C'D' \Rightarrow KH // AA' \Rightarrow H \in (A'AK)$ .

Qua  $C'$  kẻ đường thẳng song song với  $A'H$ , cắt  $A'B'$  tại  $M$ .

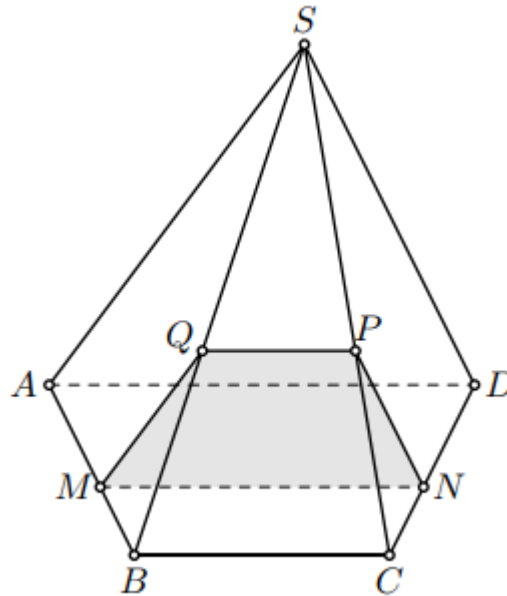
Qua  $C$  kẻ đường thẳng song song với  $AK$ , cắt  $AB$  tại  $N$ .

Suy ra mặt phẳng  $(CC'MN)$  là mặt phẳng đi qua  $C'$  và song song với  $(A'AK)$ .

Thiết diện cần tìm là hình bình hành  $CC'MN$ .

**Bài tập 5:** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có đáy là hình thang, đáy lớn  $AD = 3a$ ,  $AB = BC = a$ . Mặt bên  $(SAD)$  là tam giác cân đỉnh  $S$  với  $SA = 2a$ , gọi  $M$  là điểm thuộc cạnh  $AB$  và không trùng với  $A, B$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $M$  và song song với  $(SAD)$ . Xác định thiết diện của chóp với mặt phẳng  $(\alpha)$ . Thiết diện là hình gì?

**Lời giải**



Qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $AD$ , cắt  $CD$  tại  $N$ .

Qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $SA$ , cắt  $SB$  tại  $Q$ .

Qua  $Q$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$ , cắt  $SC$  tại  $P$ .

Suy ra  $(MNPQ)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với  $(SAD)$ .

Do đó, thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  là tứ giác

$MNPQ$ .

Bởi vì  $MN$  và  $PQ$  cùng song song với  $BC$  (hoặc  $AD$ ) nên tứ giác  $MNPQ$  là hình thang.

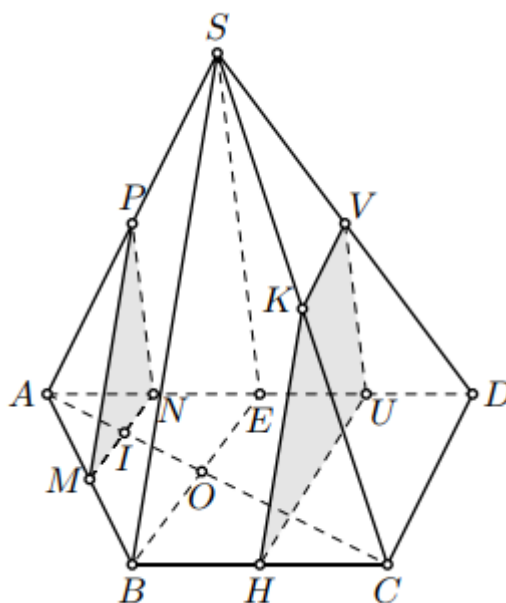
Áp dụng định lý Thales trong các tam giác  $SAB, SBC, SCD$  ta được  $\frac{BM}{BA} =$

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{CP}{CS} = \frac{CN}{CD} = \frac{NP}{SD} \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{NP}{SD} \text{ mà tam giác } SAD \text{ cân tại } S \text{ do đó } MQ = NP.$$

Vậy  $MNPQ$  là hình thang cân.

**Bài tập 6:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang  $ABCD$  có  $AD \parallel BC, AD = 2BC$ . Gọi  $E$  là trung điểm  $AD$  và  $O$  giao điểm của  $AC$  và  $BE$ ;  $I$  là một điểm di động trên  $AC$  khác  $A$  và  $C$ . Qua  $I$  vẽ mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với  $(SBE)$ . Tìm thiết diện tạo bởi  $(\alpha)$  và hình chóp  $S.ABCD$ .

**Lời giải**



**Trường hợp 1:** Điểm  $I$  nằm giữa  $A$  và  $O$ .

Qua  $I$  kẻ đường thẳng song song với  $BE$  cắt  $AB, AD$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ .

Qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $SB$  cắt  $SA$  tại  $P$ .

Suy ra  $(MNP)$  là mặt phẳng đi qua  $I$  và song song với  $(SBE)$ .

Do đó, thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  là tam giác  $MNP$ .

**Trường hợp 2:** Điểm  $I$  nằm giữa  $C$  và  $O$ .

Qua  $I$  kẻ đường thẳng song song với  $BE$  cắt  $BC, AD$  lần lượt tại  $H$  và  $U$ .

Qua  $H$  kẻ đường thẳng song song với  $SB$  cắt  $SC$  tại  $K$ .

Qua  $U$  kẻ đường thẳng song song với  $SE$  cắt  $SD$  tại  $V$ .

Suy ra  $(HKVU)$  là mặt phẳng đi qua  $I$  và song song với  $(SBE)$ .

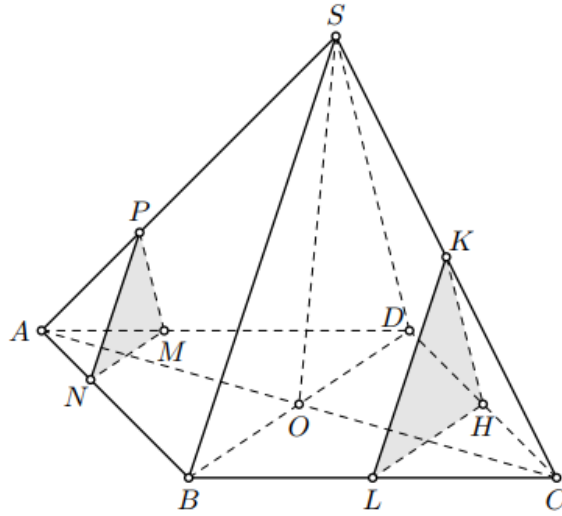
Do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  là tứ giác  $HKVU$ .

**Bài tập 7:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành tâm  $O$  có  $AC = a, BD = b$ . Tam giác  $SBD$  là tam giác đều. Một mặt phẳng  $(\alpha)$  đi động song song với mặt phẳng  $(SBD)$  và đi qua điểm  $I$  trên đoạn  $AC$ .

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(\alpha)$ .

b) Tính diện tích thiết diện theo  $a, b$  và  $x = AI$ .

**Lời giải**



a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(\alpha)$ .

Nếu  $I \in OA$  thì ta có 
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN \text{ với } MN \text{ qua } I \text{ và} \\ I \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases}$$

$MN \parallel BD$ .

Tương tự  $(\alpha)$  cắt  $(SAB)$  theo đoạn giao tuyến  $MP$  song song với  $SB$  cắt  $(SAD)$  theo đoạn giao tuyến  $NP \parallel SD$ . Thiết diện là tam giác đều  $MNP$  (vì đồng dạng với tam giác đều  $SBD$ )

Nếu  $I \in OC$  thì thiết diện là tam giác đều  $HKL$  có các cạnh tương ứng song song với cạnh tam giác  $SBD$ .

b) Tính diện tích thiết diện theo  $a, b$  và  $x = AI$ . Ta có  $S_{\triangle BCD} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$ .

Nếu  $I$  nằm giữa  $O$  và  $A$  thì  $0 < x < \frac{a}{2}$ .

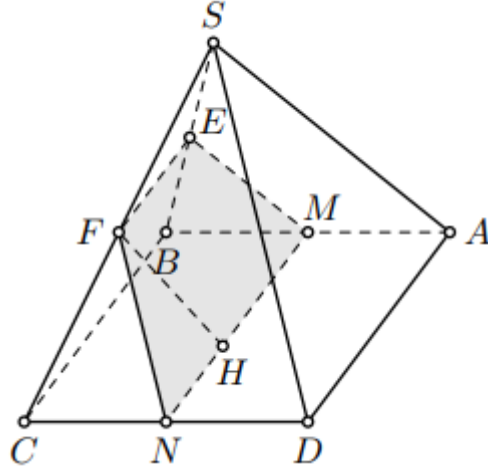
Khi đó  $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle BCD}} = \left( \frac{MN}{BD} \right)^2$ . Do  $MN \parallel BD$  suy ra  $\frac{MN}{BD} = \frac{AI}{AO} = \frac{2x}{a} \Rightarrow S_{\triangle MNP} = \frac{b^2 x^2 \sqrt{3}}{a^2}$ .

Nếu  $I$  nằm giữa  $O$  và  $C$  thì  $\frac{a}{2} < x < a$ .

$$\text{Khi đó } \frac{S_{\square HKL}}{S_{\square BCD}} = \left( \frac{HL}{BD} \right)^2. \text{ Do } HL \parallel BD \Rightarrow \frac{HL}{BD} = \frac{CI}{CO} = \frac{2(a-x)}{a} \Rightarrow S_{\square MNP} = \frac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}.$$

**Bài tập 8:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ , tam giác  $SAD$  là tam giác đều. Gọi  $M$  là một điểm thuộc cạnh  $AB$ ,  $AM = x$  với  $0 < x < a$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $M$  song song với  $(SAD)$ . Tính diện tích thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi mặt phẳng  $(P)$ .

**Lời giải**



Do mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M$  và song song với  $(SAD)$  nên cắt các cạnh của hình chóp bằng các giao tuyến đi qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(SAD)$ .

Do  $ABCD$  là hình thoi và tam giác  $SAD$  đều nên thiết diện thu được là hình thang cân  $MNFE$  với  $MN \parallel EF$ ,  $ME = NF$ .

$$\text{Khi đó } MN = a, \frac{EF}{BC} = \frac{SF}{SC} = \frac{MA}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow EF = x \text{ và } MF = a - x.$$

$$\text{Kẻ đường cao } FH, H \in MN \text{ ta có } FH = \sqrt{MF^2 - \left( \frac{MN - EF}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x).$$

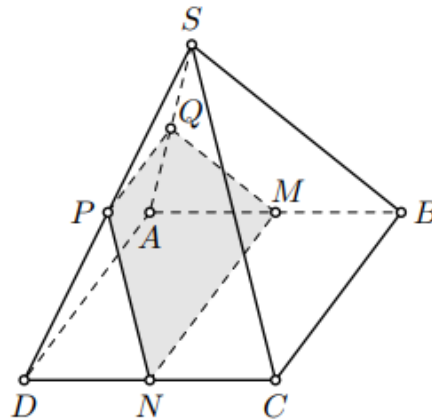
$$\text{Vậy diện tích hình thang là } S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - x^2).$$

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Cho hình vuông  $ABCD$  và tam giác đều  $SAB$  nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi  $M$  là điểm di động trên đoạn  $AB$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $M$  song song với  $(SBC)$  cắt hình chóp  $S.ABCD$  theo thiết diện là
- A. Hình tam giác.      B. Hình vuông.      C. Hình bình hành.      D. Hình thang.

**Lời giải**



Do  $(\alpha) \parallel (SBC)$  nên  $(\alpha)$  cắt mặt phẳng  $(ABCD)$  theo giao tuyến  $MN \parallel BC, (N \in CD)$ .

Hoàn toàn tương tự, ta có  $(\alpha)$  cắt các mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$  theo các giao tuyến  $MQ, NP$  ở đó  $Q \in SA$  và  $MQ \parallel SB; P \in SD$  và  $NP \parallel SC$ .

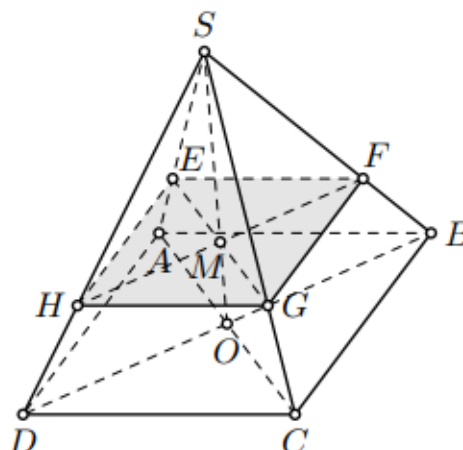
Mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt hình chóp  $S.ABCD$  theo thiết diện là tứ giác  $MNPQ$ .

Dễ thấy  $PQ \parallel AD, PQ \neq AD$  từ đó suy ra  $MNPQ$  là hình thang.

- Câu 2:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M$  là điểm bất kì trên đoạn thẳng  $SO$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $M$  và song song với  $(ABCD)$ . Thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  là hình gì?

- A. Hình bình hành.      B. Hình tam giác.      C. Hình ngũ giác.      D. Hình thang cân.

**Lời giải**



Xét mặt phẳng  $(SAC)$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  có  $M$  là điểm chung và  $AC \parallel (\alpha)$  nên giao tuyến là đường thẳng đi qua  $M$  và song song với  $AC$  cắt  $SA, SC$  lần lượt tại  $E, G$ . Tương tự  $(\alpha)$  cắt  $SB, SD$  lần lượt tại  $F, H$ . Khi đó thiết diện cần tìm là tứ giác  $EFGH$ .

Ta có  $EF \parallel GH$  và  $FG \parallel EH$  nên thiết diện là hình bình hành.

**Câu 3:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $AB = 8$ ,  $SA = SB = 6$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $O$  và song song với  $(SAB)$ . Tính diện tích của thiết diện của  $(P)$  và hình chóp  $S.ABCD$ .

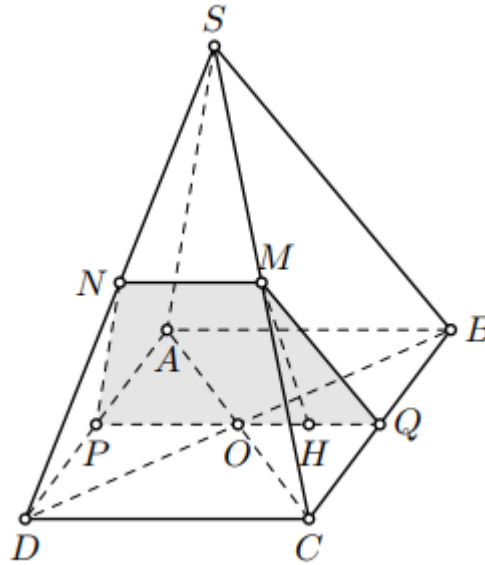
A. 12.

B.  $5\sqrt{5}$ .

C.  $6\sqrt{5}$ .

D. 13.

**Lời giải**



Qua  $O$  dựng đường thẳng  $PQ \parallel AB \Rightarrow P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ .

Qua  $P$  dựng đường thẳng  $PN \parallel SA \Rightarrow N$  là trung điểm của  $SD$ .

Qua  $Q$  dựng đường thẳng  $QM \parallel SB \Rightarrow M$  là trung điểm của  $SC$ .

Nối  $M$  và  $N \Rightarrow$  thiết diện của  $(P)$  và hình chóp  $S.ABCD$  là tứ giác  $MNPQ$ .

Vì  $PQ \parallel CD, MN \parallel CD \Rightarrow PQ \parallel MN$  nên tứ giác  $MNPQ$  là hình thang.

Ta có  $PQ = AB = 8, MN = \frac{1}{2}AB = 4, MQ = NP = \frac{1}{2}SA = 3$  suy ra  $MNPQ$  là hình thang cân.

Gọi  $H$  là chân đường cao hạ từ đỉnh  $M$  của hình thang  $MNPQ$ .

Khi đó ta có  $HQ = \frac{1}{4}PQ = 2 \Rightarrow MH = \sqrt{MQ^2 - HQ^2} = \sqrt{5}$ .

Vậy diện tích của thiết diện cần tìm là:  $S = \frac{(MN + PQ) \cdot MH}{2} = 6\sqrt{5}$ .

**Câu 4:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$ ,  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua  $I$  và song song với mặt phẳng  $(BDD')$ . Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  là hình gì?

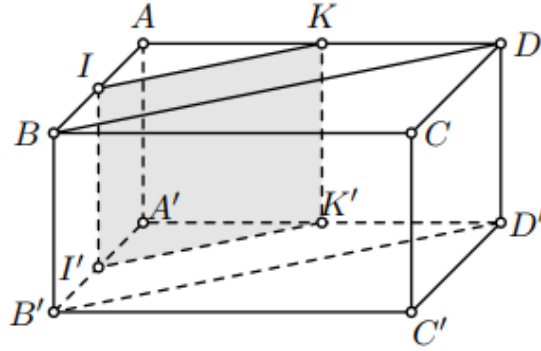
A. Hình tam giác.

B. Hình bình hành.

C. Hình ngũ giác.

D. Hình thang.

**Lời giải**



Qua  $I$  kẻ đường thẳng song song với  $BD$  cắt  $AD$  tại  $K$ .

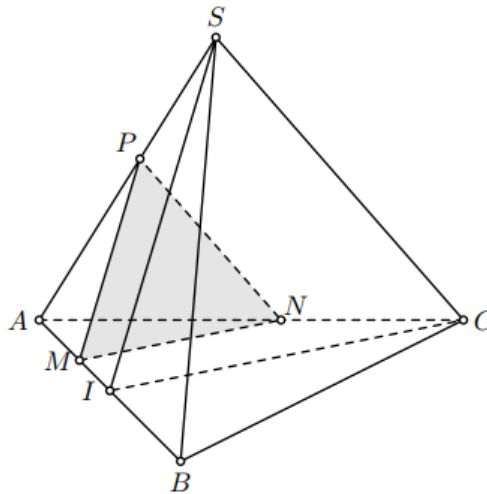
Qua  $K$  kẻ đường thẳng song song với  $DD'$  cắt  $A'D'$  tại  $K'$ .

Qua  $I$  kẻ đường thẳng song song với  $BB'$  cắt  $A'B'$  tại  $I'$ .

Thiết diện cần tìm là hình bình hành  $IKK'I'$ .

- Câu 5:** Cho tứ diện đều  $SABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ ,  $M$  là điểm di động trên đoạn  $AI$ . Qua  $M$  vẽ mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với  $(SIC)$ . Thiết diện tạo bởi  $(\alpha)$  với tứ diện  $SABC$  là A. Tam giác cân tại  $M$ . **B.** Hình bình hành. **C.** Tam giác đều. **D.** Hình thoi.

**Lời giải**



Trong mặt phẳng  $(SAB)$  qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $SI$  cắt  $SA$  tại  $P$ .

Trong mặt phẳng  $(ABC)$  qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $IC$  cắt  $AC$  tại  $N$ .

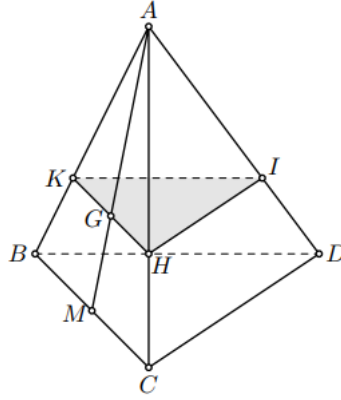
Thiết diện là tam giác  $MNP$ . Ta có  $\frac{MP}{SI} = \frac{MN}{CI} \Rightarrow MP = MN$  ( vì  $SI = CI$  )

Vậy thiết diện là tam giác  $MNP$  cân tại  $M$ .

- Câu 6:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$  và  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Cắt tứ diện bởi mặt phẳng  $(P)$  qua  $G$  và song song với mặt phẳng  $(BCD)$  thì diện tích thiết diện bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ . **B.**  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ . C.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$ . **D.**  $\frac{a^2\sqrt{3}}{18}$ .

**Lời giải**



Trong mặt phẳng  $(ABC)$  kẻ đường thẳng qua  $G$  và song song với  $BC$  cắt  $AC, AB$  lần lượt tại  $H, K$ .

Trong mặt phẳng  $(ACD)$  kẻ đường thẳng qua  $H$  và song song với  $CD$  cắt  $AD$  tại  $I$ .

Thiết diện cần tìm là tam giác  $KHI$ . Ta có:  $\Delta HKI \sim \Delta BCD$  theo tỉ số đồng dạng bằng  $\frac{2}{3}$ .

$$\text{Do đó: } S_{KHI} = \frac{4}{9} S_{BCD} = \frac{4}{9} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{9}.$$

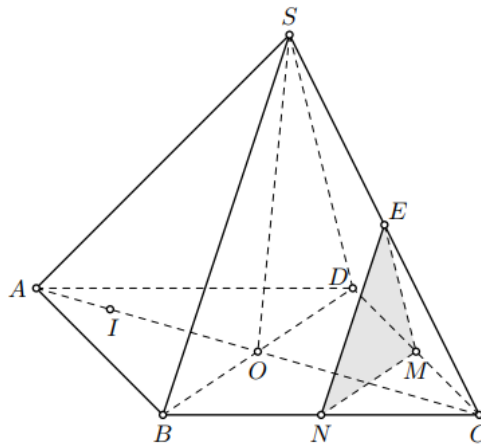
**Câu 7:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Tam giác  $SBD$  đều. Một mặt phẳng  $(P)$  song song với  $(SBD)$  và qua điểm  $I$  thuộc cạnh  $AC$  (không trùng với  $A$  hoặc  $C$ ).

Thiết diện của  $(P)$  và hình chóp là hình gì?

- A. Hình bình hành.
- C. Tam giác vuông.

- B.** Tam giác đều.
- D. Tam giác cân không đều.

**Lời giải**



**Trường hợp 1:** Điểm  $I$  thuộc đoạn  $OC$ . Gọi  $M, N, E$  lần lượt là giao điểm của  $(P)$  với các đường thẳng  $CD, BC, SC$ . Ta có thiết diện của  $(P)$  và hình chóp là tam giác  $EMN$ .

$$\begin{cases} (P) \parallel (SBD) \\ (ABCD) \cap (SBD) = BD \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{CM}{CD} = t \Rightarrow MN = t.BD \\ (P) \cap (ABCD) = MN \end{cases}$$

$$\begin{cases} (P) \parallel (SBD) \\ (SCD) \cap (SBD) = SD \Rightarrow ME \parallel SD \Rightarrow \frac{ME}{SD} = \frac{CM}{CD} = t \Rightarrow ME = t \cdot SD. \\ (P) \cap (SCD) = ME \end{cases}$$

Tương tự  $EN \parallel SB$  và  $EN = t \cdot SB$

Mà  $SB = BD = SD \Rightarrow MN = EM = EN$ , suy ra tam giác  $MNE$  là tam giác đều.

**Trường hợp 2:** Điểm  $I$  thuộc  $OA$ . Làm tương tự như trên ta được thiết diện của  $(P)$  và hình chóp cũng là một tam giác đều.

**Câu 8:** Cho tứ diện đều  $S \cdot ABC$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $SC$ . Xét  $M$  là một điểm di động trên đoạn thẳng  $AI$ . Qua  $M$  kẻ mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với  $(CIJ)$ . Khi đó thiết diện của mặt phẳng  $(\alpha)$  và tứ diện  $S \cdot ABC$  là hình gì?

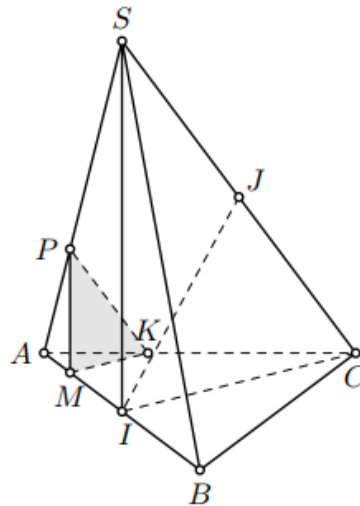
A. Tam giác đều.

B. Hình bình hành.

C. Tam giác cân tại  $M$ .

D. Hình thang cân.

**Lời giải**



Nhận xét mặt phẳng  $(CIJ)$  chính là mặt phẳng  $(SCI)$ .

Qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $IC$  cắt  $AC$  tại  $K$ .

Qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $SI$  cắt  $SA$  tại  $P$ .

Thiết diện là tam giác  $MPK$ .

Ta có:  $CI = SI \neq SC$  nên tam giác  $SCI$  cân tại  $I$  mà  $\triangle PKM \sim \triangle SCI$ .

Do đó tam giác  $PKM$  cân tại  $M$ .

**Câu 9:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S \cdot ABCD$  có cạnh đáy bằng 10. Gọi  $M$  là điểm trên  $SA$  sao cho  $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $M$  song song với  $AB$  và  $AD$ , cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

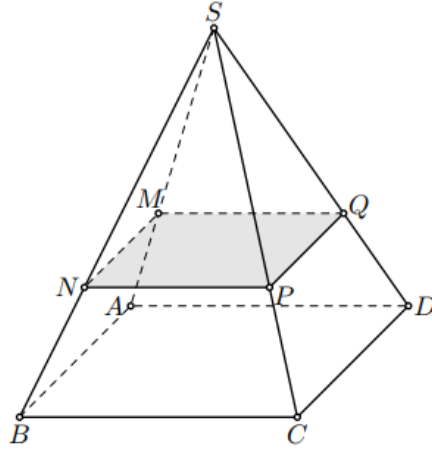
A.  $\frac{20}{3}$ .

B.  $\frac{400}{9}$ .

C.  $\frac{4}{9}$ .

D.  $\frac{16}{9}$ .

**Lời giải**



$$\begin{cases} AB \parallel (\alpha) \\ AB \subset (SAB) \\ M \in (SAB) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = Mx \parallel AB$$

$$\begin{cases} AD \parallel (\alpha) \\ AD \subset (SAD) \\ M \in (SAD) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = My \parallel AD.$$

Hai tia  $Mx, My$  cắt  $SB, SD$  lần lượt tại  $N, Q$  và 
$$\begin{cases} CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (SCD) \\ Q \in (SCD) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = Qz \parallel CD$$

Tia  $Qz$  cắt  $SC$  tại  $P$  nên thiết diện cần tìm là tứ giác  $MNPQ$ .

$$\text{Để thấy } \frac{2}{3} = \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{DA} \Rightarrow MN = NP = PQ = QM = \frac{20}{3}.$$

Mặt khác  $MN \parallel AB, NP \parallel BC \Rightarrow (MN, NP) = (AB, BC) = 90^\circ \Rightarrow MNPQ$  là hình vuông với cạnh

$$\frac{20}{3} \Rightarrow S_{MNPQ} = \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{400}{9}.$$

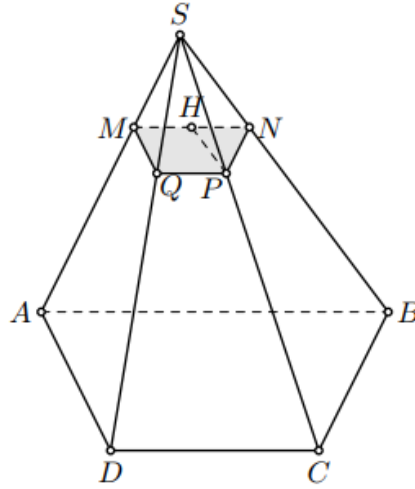
**Câu 10:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang cân với cạnh bên  $BC = 3$ . Hai đáy  $AB = 8$  và  $CD = 4$ . Mặt phẳng  $(P)$  song song với mặt phẳng  $(ABCD)$  và cắt cạnh  $SA$  tại  $M$  sao cho  $SA = 3SM$ . Diện tích thiết diện của  $(P)$  và hình chóp  $S.ABCD$  bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ .      B.  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ .      C.  $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ .      D.  $\frac{7\sqrt{3}}{9}$ .

**Lời giải**

Gọi  $M, N, P$  lần lượt là giao điểm của  $(P)$  với các cạnh  $SB, SC, SD$ . Suy ra thiết diện của  $(P)$  với hình chóp là tứ giác  $MNPQ$ .

$$\text{Do } (P) \parallel (ABCD) \text{ nên } \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{8}{3}, NP = 1, PQ = \frac{4}{3}, QM = 1.$$



Gọi  $H$  là hình chiếu của  $P$  trên cạnh  $MN$ . Do  $MNPQ$  là hình thang cân nên

$$HN = \frac{MN - PQ}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow PH = \sqrt{PN^2 - HN^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot PH \cdot (MN + PQ) = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

**Câu 11:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  và điểm  $M$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $B$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(AB'D')$ . Mặt phẳng  $(P)$  cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

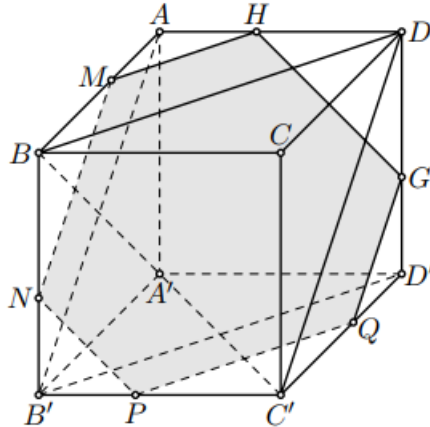
**A.** Hình tứ giác.

**B.** Hình tam giác.

**C.** Hình lục giác.

**D.** Hình ngũ giác.

**Lời giải**



Nhận thấy  $(BC'D) // (AB'D') \Rightarrow (BC'D) // (AB'D') // (P)$  (1)

Do (1) ta giả sử  $(P)$  cắt  $BB'$  tại  $N$  suy ra  $(P) \cap (ABB'A') = MN$

Mà  $(AB'D') \cap (ABB'A') = AB'$  suy ra  $MN // AB'$  suy ra  $N$  thuộc cạnh  $BB'$ .

Tương tự giả sử  $(P) \cap B'C' = P$  suy ra  $(P) \cap (BCC'B') = NP$  kết hợp với (1) suy ra  $NP // BC'$

Tương tự  $(P) \cap C'D' = Q$  sao cho  $PQ // B'D'$ ;  $(P) \cap DD' = G$  sao cho  $QG // C'D$

Hơn nữa  $(P) \cap AD = H$  sao cho  $GH // AD'$ .

Từ đó suy ra thiết diện là lục giác  $MNPQGH$ .

**Câu 12:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang  $ABCD, AB // CD, AB = 2CD, M$  là điểm thuộc cạnh  $AD, (\alpha)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(SAB)$ . Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  bằng  $\frac{2}{3}$  diện tích tam giác  $SAB$ , tính tỉ số  $x = \frac{MA}{MD}$ .

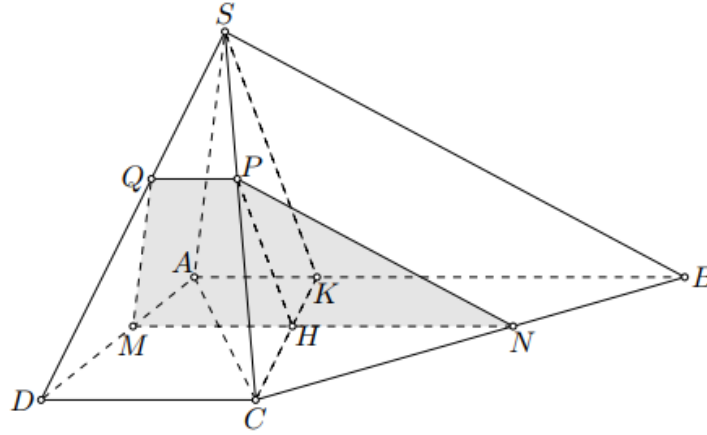
A.  $x = 1$ .

B.  $x = \frac{2}{3}$ .

C.  $x = \frac{3}{2}$ .

D.  $x = \frac{1}{2}$ .

**Lời giải**



Ta có  $\begin{cases} (\alpha) // (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \text{ với } AB, \text{ đường thẳng này cắt } BC \text{ tại } N. \\ M \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases}$

Tương tự giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $(SBC)$  là đường thẳng qua  $N$  song song  $SB$  cắt  $SC$  tại  $P$ , giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $(SCD)$  là đường thẳng qua  $P$  song song  $CD$  cắt  $SD$  tại  $Q$ . Thiết diện của  $S.ABCD$  khi cắt bởi  $(\alpha)$  là hình thang  $MNPQ$ .

Đặt  $CD = a$  ta có  $\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow PQ = \frac{ax}{x+1}$ .

Trong hình thang  $ABCD$  ta có  $MN = \frac{x}{x+1}CD + \frac{1}{x+1}AB = \frac{a(x+2)}{x+1}$ .

Gọi  $K$  là hình chiếu của  $S$  lên  $AB, H$  là giao của  $MN$  và  $CK$  khi đó  $PH // SK$

Do đó  $PH \perp MN$  và  $\frac{PH}{SK} = \frac{CH}{CK} = \frac{DM}{DA} = \frac{1}{x+1}$  nên  $\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABC}} = \frac{(PQ + MN) \cdot PH}{SK \cdot AB} = \frac{1}{x+1}$ .

Theo giả thiết  $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ .

**Câu 13:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông tâm  $O$ , cạnh  $a$ , các cạnh bên đều bằng  $2a$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua  $O$  và song song với mặt phẳng  $(SBC)$ . Tính chu vi  $P$  của thiết diện tạo bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  và hình chóp  $S.ABCD$ .

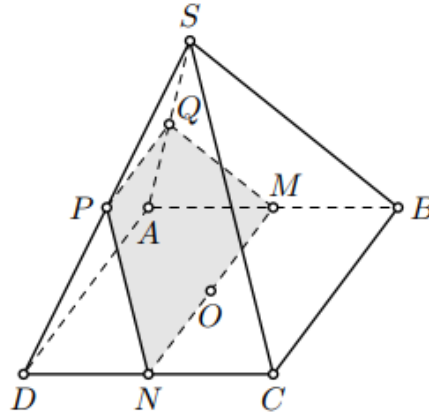
**A.**  $P = \frac{7a}{2}$ .

**B.**  $P = \frac{11a}{2}$ .

**C.**  $P = \frac{9a}{2}$ .

**D.**  $P = \frac{5a}{2}$ .

**Lời giải**



Do  $(\alpha) \parallel (SBC)$  nên  $(\alpha)$  cắt mặt phẳng  $(ABCD)$  theo giao tuyến đi qua  $O$  song song với  $BC$  và cắt  $AB$  tại  $M$ , cắt  $CD$  tại  $N$ .

Hoàn toàn tương tự ta có  $(\alpha)$  cắt các mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$  theo các giao tuyến  $MQ, NP$  ở đó  $Q \in SA$  và  $MQ \parallel SB$ ;  $P \in SD$  và  $NP \parallel SC$ .

Mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt hình chóp  $S.ABCD$  theo thiết diện là tứ giác  $MNPQ$ .

Lại có  $O$  là trung điểm  $AC$  nên  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD, SD, SA$ .

$$\text{Suy ra } MN = a, NP = \frac{1}{2}SC = a, MQ = \frac{1}{2}SB = a, PQ = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Vậy chu vi của thiết diện là } P = MN + NP + PQ + QM = a + a + \frac{a}{2} + a = \frac{7a}{2}.$$

**Câu 14:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang  $ABCD, AB \parallel CD, AB = 2CD. M$  là điểm thuộc cạnh  $AD, (\alpha)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(SAB)$ . Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  bằng  $\frac{2}{3}$  diện tích tam giác  $SAB$ . Tính tỉ số  $x = \frac{MA}{MD}$ .

**A.**  $x = 1$ .

**B.**  $x = \frac{3}{2}$ .

**C.**  $x = \frac{2}{3}$ .

**D.**  $x = \frac{1}{2}$ .

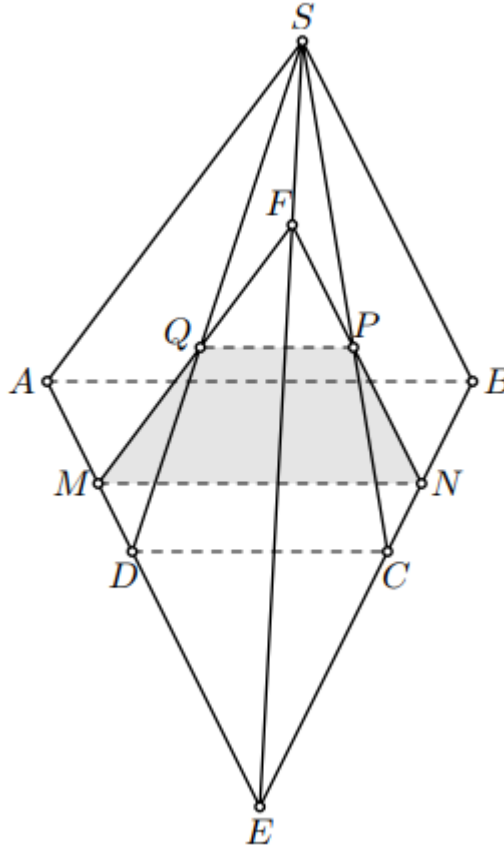
**Lời giải**

Dễ thấy, thiết diện là hình thang  $MNPQ$  (như hình vẽ)

Khi đó:  $MN \parallel AB, MQ \parallel SA, PQ \parallel CD, NP \parallel SB$ .

Gọi  $E = AD \cap BC$  và  $F = MQ \cap NP$ . Đặt  $MD = 1$  vì  $x = \frac{MA}{MD}$  nên  $MA = x, AD = x + 1$ .

$$\frac{QP}{DC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{QP}{AB} = \frac{x}{2(x+1)} \text{ mà } \frac{MN}{AB} = \frac{EM}{EA} = \frac{x+2}{2x+2} \Rightarrow \frac{QP}{MN} = \frac{x}{x+2}.$$



$$\frac{S_{FPQ}}{S_{FMN}} = \frac{FQ}{FM} \cdot \frac{FP}{FN} = \left( \frac{QP}{MN} \right)^2 = \left( \frac{x}{x+2} \right)^2 = \frac{x^2}{(x+2)^2}.$$

$$\frac{S_{FMN}}{S_{SAB}} = \frac{FM}{SA} \cdot \frac{FN}{SB} = \frac{EM}{EA} \cdot \frac{EN}{EB} = \left( \frac{MN}{AB} \right)^2 = \left( \frac{x+2}{2x+2} \right)^2 \Rightarrow S_{FMN} = \frac{(x+2)^2}{(2x+2)^2} \cdot S_{\Delta SAB}.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{FPQ}}{S_{SAB}} = \left( \frac{x}{x+2} \right)^2 \cdot \left( \frac{x+2}{2x+2} \right)^2 = \frac{x^2}{(2x+2)^2} \Rightarrow S_{FPQ} = \frac{x^2}{(2x+2)^2} \cdot S_{SAB} \Rightarrow S_{MNPQ} = S_{FMN} - S_{FPQ}$$

$$= \left[ \frac{(x+2)^2}{(2x+2)^2} - \frac{x^2}{(2x+2)^2} \right] \cdot S_{\Delta SAB} = \frac{4x+4}{(2x+2)^2} \cdot S_{\Delta SAB} \Rightarrow \frac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}} = \frac{4x+4}{(2x+2)^2}.$$

Theo đề bài ta có  $\frac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{4x+4}{(2x+2)^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 8x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}.$

Vì  $x > 0$  nên  $x = \frac{1}{2}.$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có tam giác  $SAD$  đều. Đáy  $ABCD$  là hình thang có  $AD \parallel BC$  và  $AB = BC = CD = 1, AD = 2$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua điểm  $M$  nằm trên cạnh  $AB$  và song song với  $(SAD)$ . Đặt  $BM = x$  với  $(0 < x < 1)$ . Tìm  $x$  để thiết diện của  $S.ABCD$  cắt bởi  $(P)$  có diện tích bằng một nửa diện tích tam giác  $SAD$

a) Thiết diện của  $S.ABCD$  cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  là một mặt phẳng đi qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(SAD)$ .

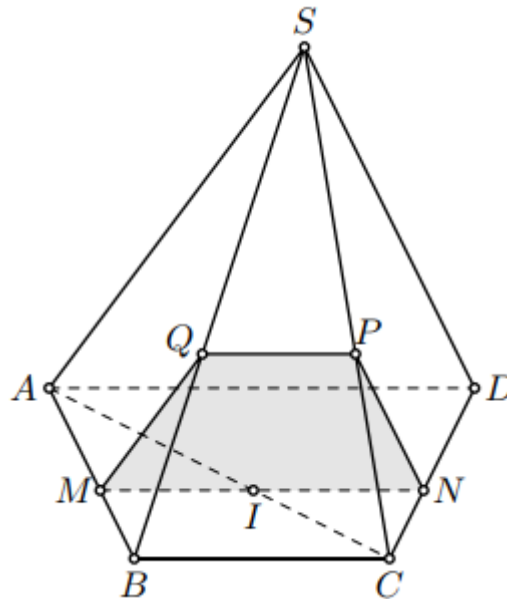
b) Thiết diện cần tìm là một lục giác đều

c) Qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $AD$  cắt  $CD$  tại  $N$  thì  $MN = 1 - x$

d) Để thiết diện của  $S.ABCD$  cắt bởi  $(P)$  có diện tích bằng một nửa diện tích tam giác  $SAD$  thì

giá trị của  $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

**Lời giải**



a) Đúng: Qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $AD$  cắt  $CD$  tại  $N$ .

Qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $SA$  cắt  $SB$  tại  $Q$ .

Qua  $Q$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $SC$  tại  $P$ .

Suy ra  $(MNPQ)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với  $(SAD)$ .

b) Sai: Do đó thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  là tứ giác  $MNPQ$ .

c) Sai: Bởi vì  $MN$  và  $PQ$  cùng song song với  $BC$  (hoặc  $AD$ ) nên tứ giác  $MNPQ$  là hình thang.

Tam giác  $SAD$  đều, cạnh  $AD = 2$  nên  $SA = SD = 2$ .

Áp dụng định lý Thales trong các tam giác  $SAB, SBC, SCD$  ta được:

$$x = \frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{SA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{CP}{CS} = \frac{CN}{CD} = \frac{NP}{SD} \text{ và } \frac{PQ}{BC} = \frac{SQ}{SB} = \frac{AM}{AB} = 1 - x.$$

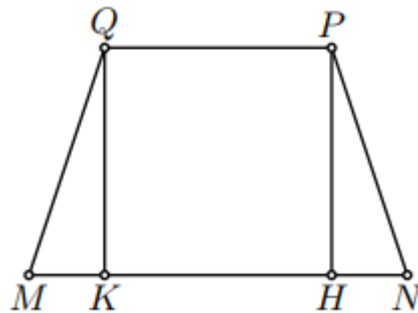
Suy ra  $MQ = NP = 2x, CN = x$  và  $PQ = 1 - x$ .

Tiếp tục áp dụng định lý Thales trong các tam giác  $ABC, ACD$  ta được:

$$1 - x = \frac{AM}{BC} = \frac{MI}{BC}, x = \frac{CN}{CD} = \frac{IN}{AD}, \Rightarrow MI = 1 - x \text{ và } IN = 2x \Rightarrow MN = x + 1.$$

Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $P, Q$  trên  $MN$ .

$$\text{Ta có } MK = HN = \frac{MN - PQ}{2} = \frac{(x + 1) - (1 - x)}{2} = x.$$



$$\Rightarrow QK = \sqrt{QM^2 - MK^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{(PQ + MN) \cdot QK}{2} = \frac{(1 - x + 1 + x) \cdot \sqrt{3}x}{2} = \sqrt{3}x.$$

$$\text{d) Sai: Từ giả thiết: } S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{SBD} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = \frac{1}{2} \frac{(2x)^2 \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = \frac{x^2 \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ do } (0 < x < 1).$$

**Câu 2:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Gọi  $O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AG$ . Gọi  $S_1, S_2$  lần lượt là diện tích thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng đi qua  $O$  đồng thời song song với mặt phẳng  $(ABC)$  và diện tích tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ . Trong mặt phẳng  $(AID)$  qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với  $AI$  cắt  $AD$  tại  $P$  và cắt  $DI$  tại  $J$ . Qua  $J$  kẻ đường thẳng song song với  $MN$ , cắt  $CD$  tại  $N$  và cắt  $BD$  tại  $M$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

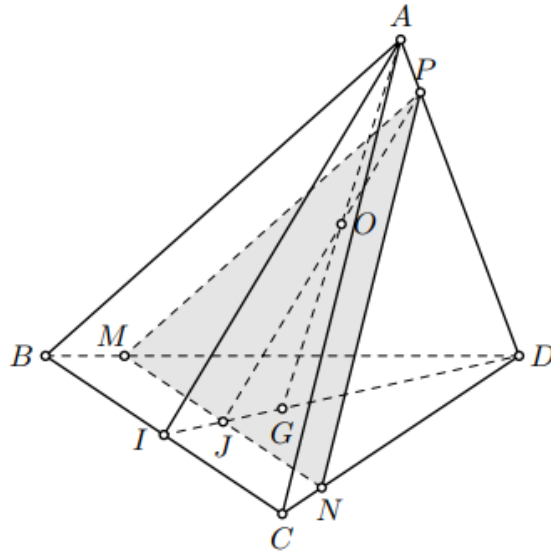
a) Thiết diện cần tìm là một hình thang

$$\text{b) } \frac{JD}{ID} = \frac{6}{5}$$

$$\text{c) } \frac{MN}{BC} = \frac{5}{6}$$

$$\text{d) } \frac{S_1}{S_2} = \frac{25}{26}$$

**Lời giải**



a) Sai: Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ . Trong mặt phẳng  $(AID)$  qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với  $AI$  cắt  $AD$  tại  $P$  và cắt  $DI$  tại  $J$ .

Qua  $J$  kẻ đường thẳng song song với  $MN$ , cắt  $CD$  tại  $N$  và cắt  $BD$  tại  $M$ .

Thiết diện cần tìm là tam giác  $MNP$ .

b) Sai: Trong tam giác  $AIG$  có  $OJ \parallel AI$  hơn nữa  $O$  là trung điểm  $AG$  nên  $J$  là trung điểm  $IG$

$$\text{Do đó } IJ = \frac{1}{2}IG = \frac{1}{6}ID \Rightarrow \frac{JD}{ID} = \frac{5}{6}.$$

c) Đúng: Suy ra hai tam giác  $MNP$  và  $BCA$  đồng dạng theo tỉ số  $k = \frac{MN}{BC} = \frac{JD}{ID} = \frac{5}{6}$ .

$$\text{d) Đúng: Vậy } \frac{S_1}{S_2} = k^2 = \frac{25}{36}.$$

**Câu 3:** Cho tứ diện  $ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi  $I$  là trung điểm đoạn  $CD$  và  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  ( $M$  khác  $B$  và  $C$ ). Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(ABI)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giao tuyến của  $(\alpha)$  và mặt phẳng  $(BCD)$  là  $MP$  với  $P \in CD$

b) Giao tuyến của  $(\alpha)$  và mặt phẳng  $(ACD)$  là  $MQ$  với  $Q \in AC$

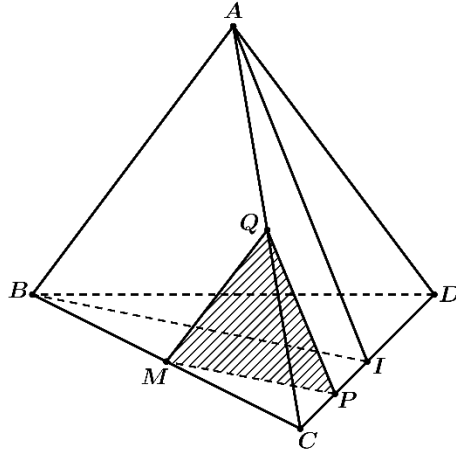
c)  $PQ = (\alpha) \cap (ABC)$

d) Thiết diện của tứ diện  $ABCD$  khi cắt bởi  $(\alpha)$  là một tam giác cân

**Lời giải**

a) Đúng: Theo giả thiết ta có  $IA = IB$  suy ra  $\triangle AIB$  cân tại  $I$ . Do  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(ABI)$  nên:

Trong  $(BCD)$  kẻ  $MP \parallel BI, P \in CD$  suy ra  $MP = (\alpha) \cap (BCD)$ .



b) Sai: Trong  $(ACD)$  kẻ  $PQ \parallel AI, Q \in AC$  suy ra  $PQ = (\alpha) \cap (ACD)$ .

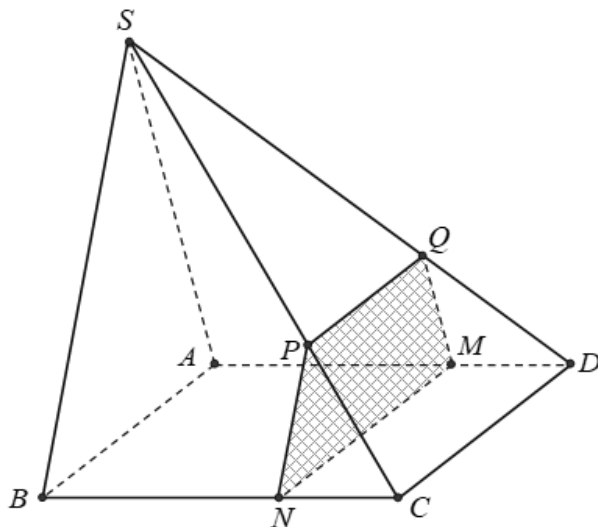
c) Sai: Khi đó  $MQ = (\alpha) \cap (ABC)$

d) Đúng: Thiết diện diện của tứ diện  $ABCD$  khi cắt bởi  $(\alpha)$  là  $\Delta MPQ$  thì theo cách dựng ta suy ra  $\Delta MPQ$  đồng dạng với  $\Delta BIA$  suy ra  $\Delta MPQ$  cân tại  $P$ .

**Câu 4:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành, mặt bên  $SAB$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $SA = a\sqrt{3}$ ,  $SB = 2a$ . Điểm  $M$  nằm trên đoạn  $AD$  sao cho  $AM = 2MD$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với  $(SAB)$ . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(P)$ .

- a) Giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  với  $(ABCD)$  là  $MN$  với  $N \in BC$   
b) Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  là một hình bình hành.  
c) Độ dài của cạnh  $AB = a$   
d) Diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  bằng  $\frac{5a^2\sqrt{3}}{8}$

**Lời giải**



- a) Đúng: Ta có:  $\begin{cases} (P) \parallel (SAB) \\ M \in AD, M \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (ABCD) = MN \\ (P) \cap (SCD) = PQ \end{cases}$  và  $MN \parallel PQ \parallel AB$

$$\text{Lại có } \begin{cases} (P) \parallel (SAB) \\ M \in AD, M \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (SAD) = MQ \\ (P) \cap (SBC) = NP \end{cases} \text{ và } \begin{cases} MQ \parallel SA \\ NP \parallel SB \end{cases}$$

Mà tam giác  $SAB$  vuông tại  $A$  nên  $SA \perp AB \Rightarrow MN \perp MQ$

b) Sai : Từ đó suy ra  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang vuông tại  $M$  và  $Q$ .

$$\text{c) Đúng : Mặt khác } MQ \parallel SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{DQ}{DS} \Rightarrow MQ = \frac{1}{3}SA \text{ và } \frac{DQ}{DS} = \frac{1}{3}.$$

$$PQ \parallel CD \Rightarrow \frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}AB, \text{ với } AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = a$$

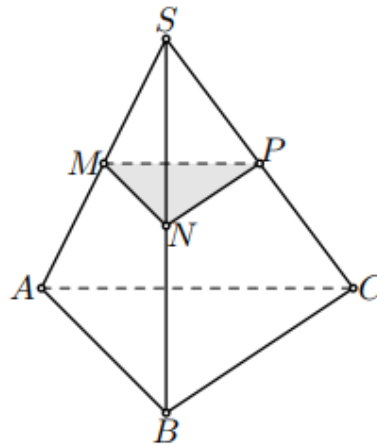
$$\text{d) Sai: Khi đó } S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MQ \cdot (PQ + MN) \Leftrightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA}{3} \cdot \left( \frac{2AB}{3} + AB \right) \Leftrightarrow S_{MNPQ} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{18}.$$

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $M$  di động trên cạnh  $SA$  sao cho  $\frac{SM}{SA} = k$ , với  $(0 < k < 1, k \in \mathbb{R})$ .

Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(ABC)$ . Khi  $k = \frac{\sqrt{m}}{n}$  với  $m, n$  nguyên dương thì mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt hình chóp  $S.ABC$  theo một thiết diện có diện tích bằng nửa diện tích của tam giác  $ABC$ . Tính  $m + n$

**Lời giải**



Qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $AB$  cắt  $SB$  tại  $N$ .

Qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $SC$  tại  $P$ .

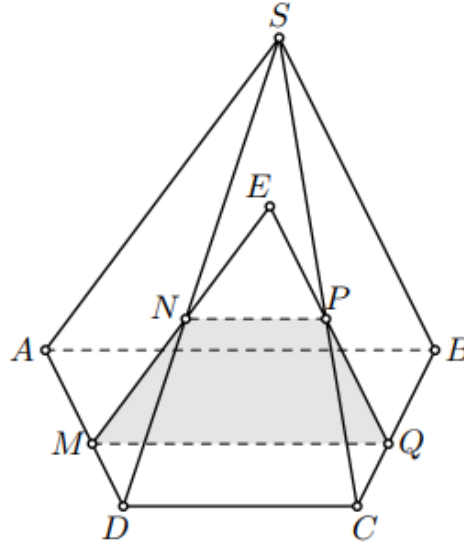
Thiết diện của hình chóp  $S.ABC$  cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  là tam giác  $MNP$ .

Ta có hai tam giác  $MNP$  và  $ABC$  đồng dạng theo tỉ số  $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = k$ .

$$\text{Suy ra } \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m = n = 2 \Rightarrow m + n = 4.$$

**Câu 2:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang  $AB \parallel CD, AB = 2CD$ . Điểm  $M$  thuộc cạnh  $AD$  ( $M$  không trùng với  $A$  và  $D$ ) sao cho  $\frac{MA}{MD} = x$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với  $(SAB)$ . Tìm  $x$  để diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  bằng một nửa diện tích tam giác  $SAB$ .

**Lời giải**



Dễ thấy thiết diện là hình thang  $MNPQ$  (như hình vẽ)

Khi đó  $MN \parallel SA, NP \parallel CD, PQ \parallel SB, QM \parallel AB$ .

Gọi  $E$  là giao điểm của  $MN$  và  $PQ$ .

$$\text{Ta có: } QM = \frac{MD}{AD} \cdot AB + \frac{AM}{AD} \cdot CD = \frac{1}{x+1} AB + \frac{x}{x+1} \cdot CD = \frac{x+2}{2(x+1)} \cdot AB.$$

$$\text{Hai tam giác } SAB \text{ và } EMQ \text{ đồng dạng nên } \frac{S_{EMQ}}{S_{SAB}} = \left( \frac{MQ}{AB} \right)^2 = \frac{(x+2)^2}{4(x+1)^2}.$$

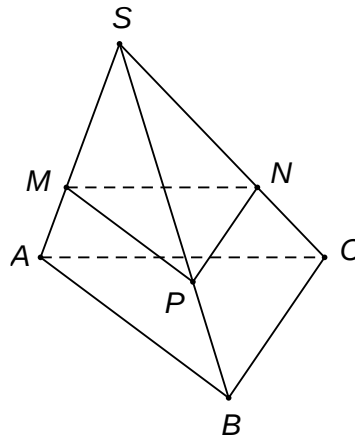
$$\text{Vì } \frac{NP}{CD} = \frac{NS}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \text{ suy ra } NP = \frac{x}{x+1} CD = \frac{x}{2(x+1)} AB.$$

$$\text{Do đó } \frac{NP}{QM} = \frac{x}{x+2} \text{ và } \frac{S_{EPN}}{S_{EMQ}} = \left( \frac{NP}{MQ} \right)^2 = \frac{x^2}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{S_{MNPQ}}{S_{EMQ}} = 1 - \frac{x^2}{(x+2)^2} = \frac{4x+4}{(x+2)^2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{S_{MNPQ}}{S_{ABC}} = \frac{4x+4}{4(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{SAB} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x=1.$$

**Câu 3:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $AB = AC = 4$ ,  $BAC = 30^\circ$ . Mặt phẳng  $(P)$  song song với  $(ABC)$  cắt đoạn  $SA$  tại  $M$  sao cho  $SM = 2MA$ . Diện tích thiết diện của  $(P)$  và hình chóp  $S.ABC$  bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

**Lời giải**



Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 4$ .

Gọi  $N, P$  lần lượt là giao điểm của mặt phẳng  $(P)$  và các cạnh  $SB, SC$ .

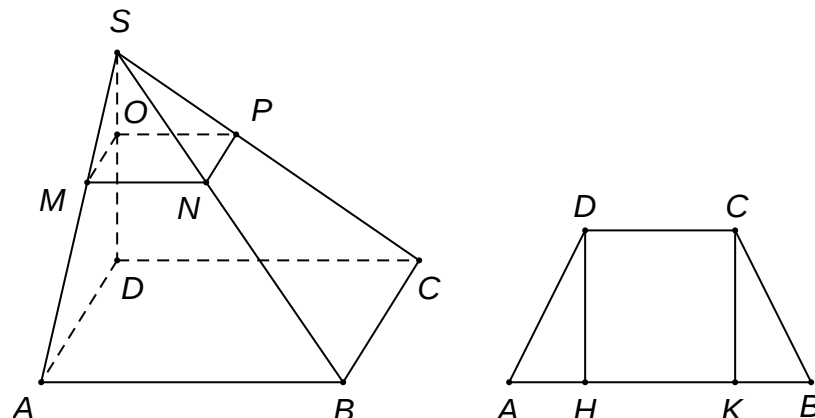
Vì  $(P) \parallel (ABC)$  nên theo định lý Talet, ta có  $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$ .

Khi đó  $(P)$  cắt hình chóp  $S.ABC$  theo thiết diện là tam giác  $MNP$  đồng dạng với tam giác

$ABC$  theo tỉ số  $k = \frac{2}{3}$ . Vậy  $S_{\triangle MNP} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 4 = \frac{16}{9} \approx 1,78$ .

**Câu 4:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang cân với cạnh bên  $BC = 2$ , hai đáy  $AB = 6$ ,  $CD = 4$ . Mặt phẳng  $(P)$  song song với  $(ABCD)$  và cắt cạnh  $SA$  tại  $M$  sao cho  $SA = 3SM$ . Diện tích thiết diện của  $(P)$  và hình chóp  $S.ABCD$  bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

**Lời giải**



Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $D, C$  trên  $AB$

$$ABCD \text{ là hình thang cân} \Rightarrow \begin{cases} AH = BK; CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow BK = 1.$$

Tam giác  $BCK$  vuông tại  $K$ , có  $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ .

Suy ra diện tích hình thang  $ABCD$  là  $S_{ABCD} = CK \cdot \frac{AB + CD}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{4 + 6}{2} = 5\sqrt{3}$ .

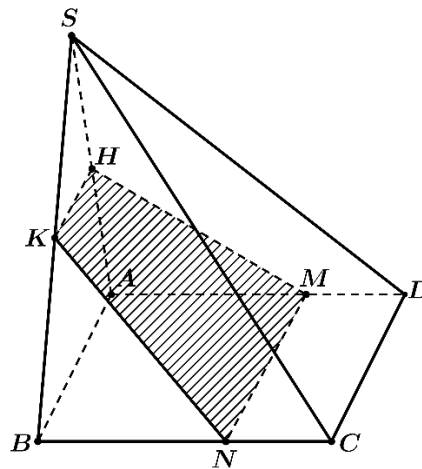
Gọi  $N, P, Q$  lần lượt là giao điểm của  $(P)$  và các cạnh  $SB, SC, SD$ .

Vì  $(P) \parallel (ABCD)$  nên theo định lý Talet, ta có  $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{AD} = \frac{1}{3}$ .

Khi đó  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện  $MNPQ$  có diện tích  $S_{MNPQ} = k^2 \cdot S_{ABCD} = \frac{5\sqrt{3}}{9} \approx 0,96$ .

**Câu 5:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $a$ , tam giác  $SAB$  đều,  $SC = SD = a\sqrt{3}$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB$ . Gọi  $M$  là một điểm trên cạnh  $AD$ , mặt phẳng  $(HKM)$  cắt  $BC$  tại  $N$ . Đặt  $AM = x$  ( $0 \leq x \leq a$ ). Tìm giá trị của  $x$  để diện tích thiết diện  $HKMN$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**



Mặt phẳng  $(HKM)$  và  $(ABCD)$  chứa hai đường thẳng song song  $HK$  và  $AB$  nên giao tuyến của chúng là  $MN$  cũng song song với  $HK$  và  $AB$ . Xét hai tam giác  $HAM$  và  $KBN$  có:

$$BN = AM; BK = AH; KBN = MAH \text{ nên } \triangle HAM = \triangle KBN.$$

Từ đó suy ra:  $MH = KN$ .  $MHKN$  là hình thang cân có hai đáy  $MN = a; HK = \frac{a}{2}$ .

Sử dụng định lý hàm số  $\cos$  cho tam giác  $SAD$  ta tính được  $\cos \angle HAD = -\frac{1}{2}$ .

$$\text{Ta tính được: } HM^2 = HA^2 + AM^2 - 2HA \cdot AM \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2 + 4x^2 + 2ax}{4}.$$

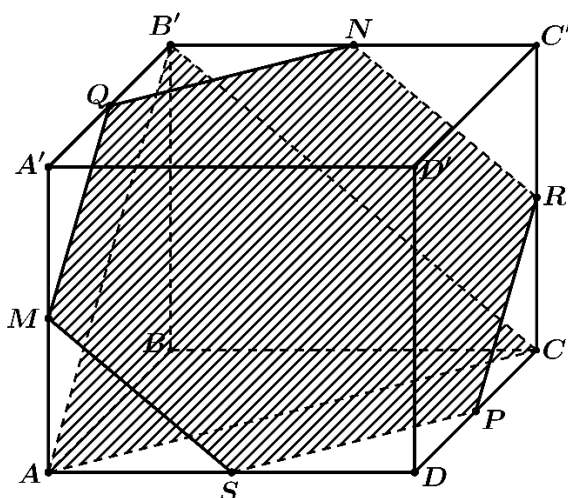
Đường cao của hình thang cân được tính bằng công thức:

$$\sqrt{HM^2 - \left(\frac{MN - HK}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16x^2 + 8ax + 3a^2}.$$

Do hai đáy có độ dài không đổi nên diện tích thiết diện bé nhất khi đường cao bé nhất đạt khi  $x=0$

**Câu 6:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $AB=4$ . Trên các cạnh  $AA', B'C', CD$  lần lượt lấy các điểm  $M, N, P$  sao cho  $MA = NB' = PC = x$  ( $2 \leq x < 4$ ). Khi thiết diện được tạo bởi mặt phẳng  $(MNP)$  cắt hình lập phương có diện tích bằng  $11\sqrt{3}$  thì giá trị  $x$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**



Ta có:  $\frac{MA}{MA'} = \frac{NB'}{NC'} \Rightarrow MN, AB', A'C'$  thuộc ba mặt phẳng song song hay  $MN // (\alpha)$  do chứa  $AB'$  và song song với  $A'C' \Rightarrow (\alpha) \equiv (AB'C)$ .

Lại có  $\frac{MA}{MA'} = \frac{PC}{PD} \Rightarrow MP, AC, A'D$  thuộc ba mặt phẳng song song hay  $MP // (\beta)$  do chứa  $AC$  và  $A'D \Rightarrow (\beta) \equiv (AB'C)$ .

Khi đó  $\begin{cases} MN // (AB'C) \\ MP // (AB'C) \Rightarrow (MNP) // (AB'C) \\ MN \cap MP \end{cases}$

Ta lại có:  $\begin{cases} (MNP) // (AB'C) \\ (AA'B'B) \cap (AB'C) = AB' \Rightarrow (MNP) \cap (AA'B'B) = d \Rightarrow d \cap A'B' = Q \\ M \in (MNP) \cap (AA'B'B) \end{cases}$

Tương tự ta xác định được các giao tuyến của mặt phẳng  $(MNP)$  với các mặt  $ABCD$  và  $BB'C'C$  của hình lập phương. Từ đó, thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng  $(MNP)$  là lục giác  $MQNRPS$  như hình vẽ.

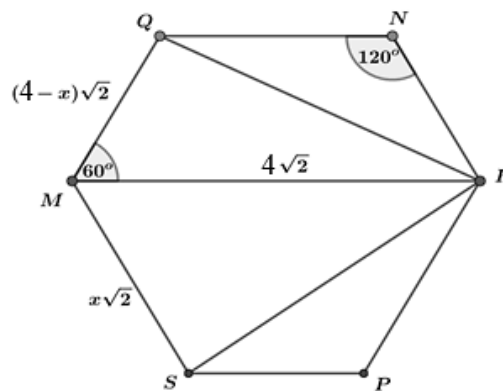
Tam giác  $AB'C$  đều và  $(QM, QN) = (AB', AC) = 60^\circ$ . Từ đó dễ thấy lục giác  $MQNRPS$  có tất cả các góc bằng  $120^\circ$ .

Tam giác  $AMS$  vuông cân tại  $A$  nên  $MS = AM \cdot \sqrt{2} = x\sqrt{2}$  và tương tự  $PR = QN = x\sqrt{2}$ .

Tam giác  $A'MQ$  vuông cân tại  $A'$  nên  $MQ = A'M \cdot \sqrt{2} = (4-x)\sqrt{2}$

Tương tự ta có:  $NR = SP = (4-x)\sqrt{2}$ .

$$\begin{cases} (MNP) \parallel AC \\ (MNP) \cap (AA'C'C) = MR \Rightarrow MR \parallel AC \Rightarrow MRCA \text{ là hình bình hành} \Rightarrow MR = AC = 4\sqrt{2} \\ AC \subset (AA'C'C) \end{cases}$$



$$S_{MQNRPS} = S_{MQRS} + 2S_{QNR} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ}{2} + (4-x)\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} \cdot \sin 120^\circ = 8\sqrt{3} + \sqrt{3}(4-x)x.$$

$$S_{MQNRPS} = 11\sqrt{3} \Leftrightarrow (4-x)x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Đổi chiều điều kiện lấy  $x = 3$ .

-----HẾT-----